Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2022,
Convocatoria ordinaria

mentoor.es

Problema 1. Álgebra

Dadas las matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ **y** $\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$. **Se pide:**

a) **Demostrar que** $\boldsymbol{C - AB^T}$ **tiene inversa y calcularla.**
b) **Calcular la matriz X que verifica** $\boldsymbol{CX = AB^TX + I}$, **donde I es la matriz identidad.**
c) **Justificar que** $\boldsymbol{(AB^T)^n = 2^nI}$ **para todo número natural n.**

Solución:

a) **Demostrar que** $\boldsymbol{C - AB^T}$ **tiene inversa y calcularla.**

Primero, calculamos AB^T.

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 \\ -1+2-1 & 0+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos $M = C - AB^T$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que tiene inversa, calculamos su determinante: $|M| = (-1)(-3) - 1(0) = 3$. Como $|M| \neq 0$, la matriz tiene inversa. La calculamos:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\text{Adj}(M)^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\textbf{Tiene inversa pues } \boldsymbol{|C - AB^T| = 3 \neq 0}\textbf{. La inversa es } \boldsymbol{\begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}}.}$$

b) **Calcular la matriz X que verifica** $\boldsymbol{CX = AB^TX + I}$, **donde I es la matriz identidad.**

Partimos de la ecuación $CX = AB^TX + I$. Reordenamos para despejar X:

$$CX - AB^TX = I \implies (C - AB^T)X = I$$

Llamando $M = C - AB^T$, tenemos $MX = I$. Multiplicando por la inversa M^{-1} por la izquierda:

$$M^{-1}MX = M^{-1}I \implies X = M^{-1}$$

La matriz X es la inversa calculada en el apartado anterior.

$$\boxed{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}}.}$$

c) Justificar que $\boldsymbol{(AB^T)^n = 2^n I}$ para todo número natural n.

En el apartado a) calculamos que $AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Esta matriz se puede escribir como $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$. Por lo tanto, la potencia n-ésima es:

$$(AB^T)^n = (2I)^n = 2^n I^n$$

Dado que la potencia de una matriz identidad es la propia matriz identidad ($I^n = I$), la expresión se simplifica a:

$$(AB^T)^n = 2^n I$$

La justificación queda completa.

$$\boxed{\textbf{Como } \boldsymbol{AB^T = 2I}, \textbf{ entonces } \boldsymbol{(AB^T)^n = (2I)^n = 2^n I^n = 2^n I}.}$$

Problema 2. Álgebra

Dada la matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}}$. **Determinar:**

a) **El rango de la matriz A en función del parámetro real m.**
b) **La matriz inversa de A en el caso m=2.**
c) **El número real m para el cual el determinante de la matriz 2A es igual a -8.**

Solución:

a) **El rango de la matriz A en función del parámetro real m.**

Calculamos el determinante de A:

$$\begin{aligned} |A| &= m(m^2-2m) - 0 + (m-1)(-4m^2-0) \\ &= m^3 - 2m^2 - 4m^3 + 4m^2 \\ &= -3m^3 + 2m^2 = m^2(-3m+2) \end{aligned}$$

Igualamos a cero: $m^2(-3m+2) = 0 \implies m = 0$ o $m = 2/3$.

Caso 1: $\boldsymbol{m \neq 0}$ **y** $\boldsymbol{m \neq 2/3}$ $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$.

Caso 2: $\boldsymbol{m = 0}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son proporcionales. Las dos primeras columnas son nulas.
El menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ es 0.
Todos los menores de orden 2 son nulos excepto los que involucran las filas 2 y 3 con la columna 3, pero esas filas son idénticas.
Hay un elemento no nulo, por tanto $\text{Rg}(A) = 1$.

Caso 3: $\boldsymbol{m = 2/3}$
$|A| = 0 \implies \text{Rg}(A) < 3$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo:
Para $m = 2/3$, $\begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m = (2/3)^2 - 2(2/3) = 4/9 - 4/3 \neq 0$.
Por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$\boxed{\textbf{Si } \boldsymbol{m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2/3\}, \text{Rg}(A) = 3}. \textbf{ Si } \boldsymbol{m = 0, \text{Rg}(A) = 1}. \textbf{ Si } \boldsymbol{m = 2/3, \text{Rg}(A) = 2}.}$$

b) **La matriz inversa de A en el caso m=2.**

Para $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
$|A| = 2^2(-3(2)+2) = 4(-4) = -16$. Existe la inversa.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \implies \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}}.}$$

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz 2A es igual a -8.

Por propiedades de los determinantes, $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8|A|$.
$8|A| = -8 \implies |A| = -1$.
Usamos la fórmula del determinante del apartado a):
$m^2(-3m+2) = -1 \implies -3m^3 + 2m^2 + 1 = 0$.
Probamos con divisores del término independiente (1, -1). Para $m = 1$: $-3+2+1 = 0$. Se cumple.

$$\boxed{\textbf{El valor es } \boldsymbol{m = 1}.}$$

Problema 3. Geometría

Dadas las rectas $\boldsymbol{r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}}$ **y** $\boldsymbol{s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}}$.

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s.
b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s.

Solución:

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s.

Escribimos las rectas en paramétricas, usando $z = \lambda$ para r y $z = \mu$ para s.
$r : P_r(-1, 2, 0), \vec{v}_r(1, -3, 1)$.
$s : P_s(4, -3, 0), \vec{v}_s(-5, 4, 1)$.
Los vectores directores no son proporcionales, por lo que las rectas se cortan o se cruzan.
Estudiamos el producto mixto del vector $\vec{P_rP_s} = (5, -5, 0)$ y los vectores directores.

$$[\vec{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5(-7) - (-5)(6) + 0 = -35 + 30 = -5 \neq 0.$$

Como el determinante es no nulo, los vectores no son coplanarios.

$$\boxed{\textbf{Las rectas r y s se cruzan.}}$$

b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s.

La recta l está determinada por dos planos: π_1 que contiene a r y al origen, y π_2 que contiene a s y al origen.
Plano π_1: Contiene al punto $P_r(-1, 2, 0)$, al origen $O(0, 0, 0)$ y al vector $\vec{v}_r(1, -3, 1)$.
Vectores directores: $\vec{OP_r} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v}_r = (1, -3, 1)$.

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = x(2) - y(-1) + z(1) = 2x + y + z = 0.$$

Plano π_2: Contiene a $P_s(4, -3, 0)$, al origen $O(0, 0, 0)$ y a $\vec{v}_s(-5, 4, 1)$.
Vectores directores: $\vec{OP_s} = (4, -3, 0)$ y $\vec{v}_s = (-5, 4, 1)$.

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = x(-3) - y(4) + z(1) = -3x - 4y + z = 0.$$

La recta l es la intersección de estos dos planos.

$$\boxed{\boldsymbol{l \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -3x - 4y + z = 0 \end{cases}}.}$$

Problema 4. Geometría

Dados los planos $\boldsymbol{\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0}$ y $\boldsymbol{\pi_2 : \begin{cases} x = -1+\alpha \\ y = 1+\alpha+\beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}}$ y la recta $\boldsymbol{r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}}$.

a) **Calcular la posición relativa de $\boldsymbol{\pi_1}$ y $\boldsymbol{\pi_2}$.**
b) **Calcular el punto $\boldsymbol{P'}$ que es simétrico al punto $\boldsymbol{P = (1, 0, 0)}$ respecto del plano $\boldsymbol{\pi_1}$.**
c) **Calcular, si existe, el punto de intersección de $\boldsymbol{\pi_1}$ y r.**

Solución:

a) **Posición relativa de los planos.**

El vector normal de π_1 es $\vec{n}_1 = (2, -1, -1)$.
Obtenemos el vector normal de π_2 a partir de sus vectores directores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, -1)$.

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1).$$

Comparando $\vec{n}_1 = (2, -1, -1)$ y $\vec{n}_2 = (-2, 1, 1)$, vemos que son proporcionales ($\vec{n}_2 = -1 \cdot \vec{n}_1$). Por tanto, los planos son paralelos o coincidentes.
Tomamos un punto de π_2, $P_2(-1, 1, 0)$, y vemos si pertenece a π_1:
$2(-1) - (1) - (0) + 4 = -2 - 1 + 4 = 1 \neq 0$. El punto no pertenece a π_1.

$$\boxed{\textbf{Los planos son paralelos.}}$$

b) **Punto simétrico P'.**

1. Recta s perpendicular a π_1 que pasa por $P(1, 0, 0)$. Su vector director es $\vec{n}_1 = (2, -1, -1)$. $s : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, -1)$.
2. Intersección M de s y π_1: $2(1+2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0 \implies 2 + 4\lambda + \lambda + \lambda + 4 = 0 \implies 6\lambda + 6 = 0 \implies \lambda = -1$. $M = (1 - 2, 0 + 1, 0 + 1) = (-1, 1, 1)$.
3. M es el punto medio de PP'. Si $P' = (x', y', z')$, entonces $M = (\frac{1+x'}{2}, \frac{0+y'}{2}, \frac{0+z'}{2})$. $-1 = \frac{1+x'}{2} \implies x' = -3$. $1 = \frac{y'}{2} \implies y' = 2$. $1 = \frac{z'}{2} \implies z' = 2$.

$$\boxed{\textbf{El punto simétrico es } \boldsymbol{P' = (-3, 2, 2)}.}$$

c) **Intersección de $\boldsymbol{\pi_1}$ y r.**

Escribimos la recta r en paramétricas: $x = 1 + \lambda, y = 2\lambda, z = 2 - \lambda$.
Sustituimos en la ecuación de π_1:
$2(1 + \lambda) - (2\lambda) - (2 - \lambda) + 4 = 0$. $2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0 \implies \lambda + 4 = 0 \implies \lambda = -4$.
Sustituimos $\lambda = -4$ en las ecuaciones de la recta para hallar el punto. $x = 1 - 4 = -3, y = 2(-4) = -8, z = 2 - (-4) = 6$.

$$\boxed{\textbf{El punto de intersección es } \boldsymbol{(-3, -8, 6)}.}$$

Problema 5. Análisis

Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) **El dominio y los puntos de corte con los ejes.**
b) **Las asíntotas de la función.**
c) **Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos.**
d) **La primitiva de la función f(x).**

Solución:

a) **El dominio y los puntos de corte con los ejes.**
Dominio: $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$.
$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Corte eje Y (x=0): $f(0) = 3/(-4) = -3/4$. Punto $(0, -3/4)$.

Corte eje X (y=0): $x^2 + 3 = 0$, no tiene solución real. No corta al eje X.

$$\boxed{\textbf{Dominio: } \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}. \textbf{Punto de corte: } (0, -3/4).}$$

b) **Las asíntotas de la función.**
Verticales: En $x = 2$ y $x = -2$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

Horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Hay asíntota horizontal en $y = 1$.

$$\boxed{\textbf{A. Verticales: } x = 2, x = -2. \textbf{ A. Horizontal: } y = 1.}$$

c) **Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos.**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - (x^2+3)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 0$$

El signo de $f'(x)$ depende de $-14x$.
Creciente si $x < 0$: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$. Decreciente si $x > 0$: $(0, 2) \cup (2, \infty)$.
En $x = 0$ hay un máximo relativo: $f(0) = -3/4$.

$$\boxed{\textbf{Creciente en } (-\infty, -2) \cup (-2, 0). \textbf{ Decreciente en } (0, 2) \cup (2, \infty). \textbf{ Máximo en } (0, -3/4).}$$

d) **La primitiva de la función f(x).**

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-4} dx$$

.

$$x^2 + 3 = 1(x^2 - 4) + 7$$

$$\int (1 + \frac{7}{x^2 - 4})dx = x + \int \frac{7}{(x-2)(x+2)}dx$$

Descomposición: $\frac{7}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$. $A = 7/4, B = -7/4$.

$$x + \frac{7}{4}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{7}{4}\int \frac{1}{x+2}dx = x + \frac{7}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{4}\ln|x+2| + C$$

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = x + \frac{7}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.}}$$

Problema 6. Análisis

Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m de longitud.

a) **Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.**

b) **Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de manera que la suma de las áreas sea mínima y calcular el área mínima.**

Solución:

a) **Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.**

Perímetro del triángulo: $3x$. Longitud de cable restante para el cuadrado: $240 - 3x$.
Lado del cuadrado: $L_c = \frac{240-3x}{4}$.
Área del triángulo equilátero: $A_t = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
Área del cuadrado: $A_c = L_c^2 = (\frac{240-3x}{4})^2$.
Suma de las áreas: $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + (\frac{240-3x}{4})^2$.

$$\boxed{\boldsymbol{A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(60 - \frac{3}{4}x\right)^2.}}$$

b) **Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de manera que la suma de las áreas sea mínima y calcular el área mínima.**

Derivamos $A(x)$ e igualamos a 0.

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x) + 2(60 - \frac{3}{4}x)(-\frac{3}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}(60 - \frac{3}{4}x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 90 + \frac{9}{8}x$$

$$A'(x) = 0 \implies x(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8}) = 90 \implies x(\frac{4\sqrt{3}+9}{8}) = 90 \implies x = \frac{720}{9+4\sqrt{3}}$$

La longitud de cable para el triángulo es $3x = \frac{2160}{9+4\sqrt{3}}$ m

$$A''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8} > 0$$

por lo que es un mínimo. Calculamos el área mínima sustituyendo x:

$$x \approx 45.19\text{m}$$

$$A(45.19) = \frac{\sqrt{3}}{4}(45.19)^2 + (60 - \frac{3}{4}(45.19))^2 \approx 884.66 + (26.11)^2 \approx 884.66 + 681.73 = 1566.39m^2$$

$$\boxed{\textbf{Longitud para el triángulo: } \boldsymbol{\frac{2160}{9+4\sqrt{3}}} \approx \textbf{135.57 m. Área mínima } \approx \textbf{1566.39 m}^{\mathbf{2}}\textbf{.}}$$